

0017-9310(95)00289-8

TECHNICAL NOTES

Procédures d'utilisation d'un conductivimètre à barre divisée pour des échantillons grenus: application au cas des granites

MICHEL DANIS

Laboratoire de Génie Mécanique, IUT "A", Université de Bordeaux I
33 405 Talence Cedex, France

CLAIRE GOBBÉ

Laboratoire Energétique et Phénomènes de Transfert (U.R.A. CNRS 873) ENSAM,
33 405 Talence Cedex, France

et

JEAN-JACQUES ROYER

Centre de Recherches Pétrographiques et Géochimiques, CNRS BP20, 54 501 Vandoeuvre les Nancy
Cedex, France

(Received 12 September 1994 and in final form 23 June 1995)

1. INTRODUCTION

De nombreux appareils de mesure de conductivité thermique des matériaux solides en régime permanent sont basés sur un principe simple [1], mais de mise en oeuvre délicate. Parmi les techniques existantes [2], le conductivimètre à barre divisée est un conductivimètre comparatif qui, exploité suivant diverses procédures, permet d'obtenir des mesures de précisions variables.

La procédure d'utilisation directe d'un appareil à barre divisée, basée sur la simple application de la loi de Fourier, peut conduire à des erreurs dues aux résistances thermiques de contact au niveau des faces de l'échantillon [3] ou au caractère hétérogène de l'échantillon. Sur ce dernier point, la conductivité thermique apparente mesurée dépend alors de l'épaisseur de l'échantillon et diffère de la conductivité thermique homogénéisée [4].

Pour s'affranchir de la connaissance des résistances de contact, Beck [5] a proposé une procédure d'utilisation spécifique de l'appareil à barre divisée, souvent employée dans le domaine des Sciences de la Terre [6], mais qui ne tient pas compte de l'hétérogénéité de certains matériaux pour lesquels apparaissent des difficultés portant sur le principe même d'interprétation.

Dans cet article, qui constitue une synthèse d'un rapport interne [7] qu'il est possible de se procurer auprès des auteurs, on montre que le caractère hétérogène du matériau peut induire une erreur liée à la procédure d'utilisation du conductivimètre à barre divisée. Après un rappel bref de la procédure proposée par Beck, nous présentons une simulation numérique du transfert conductif à travers un échantillon hétérogène de granite d'épaisseur définie et placé dans un conductivimètre à barre divisée. Les résultats de cette simulation sont exploités suivant la procédure directe et suivant la procédure de Beck. La première fait apparaître pour des échantillons hétérogènes grenus une erreur systématique liée au non respect des conditions de températures uniformes sur les faces de l'échantillon, alors que la seconde donne une mesure proche de la conductivité thermique homogénéisée. Enfin,

des résultats expérimentaux viennent confirmer l'erreur prédite par les calculs numériques, et une analyse plus approfondie de la procédure de Beck est proposée.

2. MÉTHODE DE LA BARRE DIVISÉE

2.1. Procédure directe

Le principe est simple: si une densité de flux de chaleur, φ , traverse l'échantillon à étudier, la conductivité thermique λ est déduite du gradient thermique $d\theta/dx$ engendré par ce flux, soit

$$\lambda = -\varphi/(d\theta/dx). \quad (1)$$

Dans un appareil à barre divisée, l'échantillon est inséré dans une pile expérimentale entre deux blocs conducteurs (Fig. 1a). Un flux de chaleur q est apporté sur une des extrémités de la pile expérimentale, tandis qu'un flux de chaleur est prélevé sur l'autre extrémité. Si les faces latérales de la pile sont parfaitement isolées (condition difficile à respecter mais nous n'aborderons pas ce problème ici) les flux apporté et prélevé sont strictement égaux, et correspondent à la densité de flux qui traverse l'échantillon: $\varphi = q/S$, S représentant la section de la pile expérimentale.

Aux interfaces entre l'échantillon et les blocs conducteurs, il existe une résistance thermique de contact qui se traduit, à l'échelle macroscopique, par une discontinuité du champ thermique (Fig. 1b). L'extrapolation du champ thermique dans les blocs conducteurs permet donc d'accéder à la température sur les faces des blocs, mais pas sur les faces de l'échantillon, d'où une incertitude sur la valeur du gradient thermique ($d\theta/dx$) dans l'échantillon. Pour s'affranchir de l'influence des résistances de contact, Beck a proposé une procédure d'utilisation de l'appareil à barre divisée.

2.2. Procédure de Beck

La procédure proposée par Beck [5] consiste à effectuer plusieurs mesures sur des échantillons d'épaisseurs différen-

NOMENCLATURE

a	dimension de grain [m]
A, B	constantes
e	épaisseur de l'échantillon [m]
e_B	épaisseur des blocs conducteurs [m]
q	flux de chaleur [W]
r	résistance thermique de contact [kW^{-1}]
S	section de l'échantillon [m^2]
x	coordonnée d'espace [m].

Greek symbols

$\Delta\theta$	différence ($\theta_2-\theta_1$) ou ($\theta_4-\theta_3$) [K]
φ	densité de flux de chaleur [W m^{-2}]
λ	conductivité de l'échantillon [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
λ_B	conductivité des blocs conducteurs [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
$\lambda_{A,Q}$	conductivité des minéraux du granite [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
θ	température [K]
θ_i	température au point i ($i = 1, 2, 3, 4$) [K].

tes et de conductivité strictement identique. Les températures ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$) (Fig. 1a), mesurées en deux points pour chacun des deux blocs conducteurs de conductivité thermique connue λ_B , permettent de déduire le flux de chaleur traversant la pile et par conséquent la conductivité thermique des échantillons sans connaître la valeur des résistances de contact à condition qu'elles soient identiques pour toutes les mesures.

Soit $\Delta\theta$ la différence de température entre les points 2 et 3, et $\text{grad } \theta$ le gradient de température dans les blocs conducteurs évalué à partir des températures mesurées (θ_1, θ_2) ou (θ_3, θ_4), (Fig. 1a), la conservation du flux dans la pile expérimentale se traduit par une évolution linéaire de $\Delta\theta/\text{grad } \theta$ en fonction de l'épaisseur e de l'échantillon

$$(\Delta\theta/\text{grad } \theta) = e[\lambda_B/\lambda] + e_B + rS\lambda_B. \quad (2)$$

A partir des mesures, on peut déterminer la pente de la droite (λ_B/λ) par une méthode aux moindres carrés et déduire la conductivité thermique du matériau des échantillons λ .

Physiquement, le rapport $(\Delta\theta/\text{grad } \theta)$ est la longueur d'une barre constituée du matériau des blocs conducteurs et thermiquement équivalente à l'ensemble 'blocs conducteurs entre

les points 2 et 3—échantillon—résistances de contact'. L'ordonnée à l'origine représente, elle, la longueur de la barre de conductivité thermique λ_B thermiquement équivalente à l'ensemble 'blocs conducteurs entre les points 2 et 3—résistances de contact', soit $(e_B + rS\lambda_B)$.

Si les hypothèses déjà citées sont vérifiées, les valeurs de conductivité thermique obtenues avec l'appareil à barre divisée sont précises pour des matériaux homogènes, ce qui n'est pas le cas pour des matériaux hétérogènes. Nous montrerons d'une part qu'une erreur systématique peut apparaître suivant la procédure utilisée, en particulier dans le cas de matériaux grenus et d'autre part que la mesure donnée par la procédure de Beck découle de processus complexes.

3. SIMULATION NUMÉRIQUE DU FONCTIONNEMENT D'UN APPAREIL À BARRE DIVISÉE

Une simulation numérique tridimensionnelle de la mesure de conductivité thermique par un appareil à barre divisée a

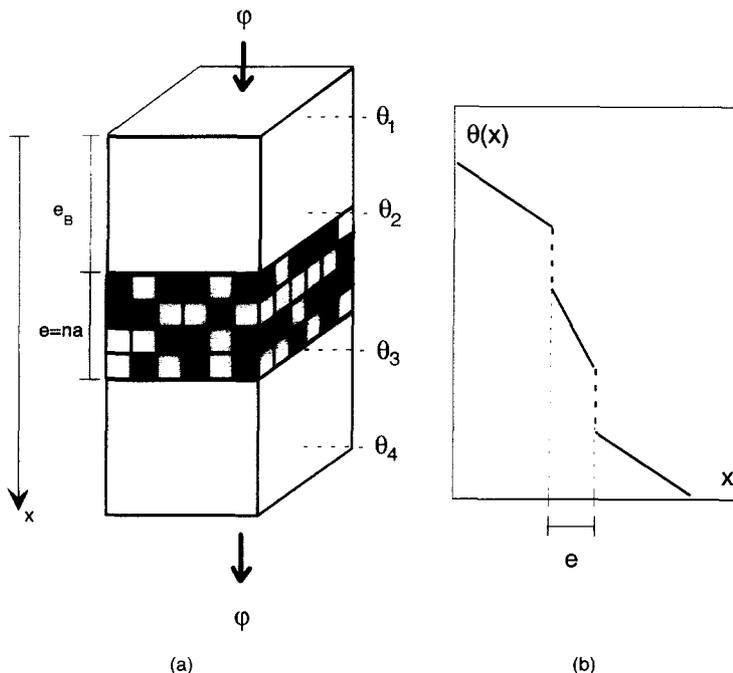


Fig. 1. Conductivimètre à barre divisée. (a) Schéma de principe. (b) Champ de température avec résistance de contact aux faces de l'échantillon.

été présentée antérieurement [4]. Nous rappelons brièvement la description de ce modèle avant de comparer l'interprétation qui peut en être faite par la procédure directe ou la procédure de Beck.

La géométrie étudiée correspond à l'ensemble 'blocs conducteurs—échantillon', (Fig. 1a) situé entre les points 2 et 3. Les températures θ_2 et θ_3 aux extrémités du domaine sont imposées, et les faces latérales sont supposées adiabatiques. La seule difficulté expérimentale prise en compte dans le modèle concerne l'hétérogénéité de l'échantillon, les résistances thermiques de contact étant supposées nulles. Le champ de température est calculé en régime permanent dans tout le domaine pour un échantillon de morphologie donnée, par une méthode aux volumes finis. On peut donc déduire la conductivité thermique de l'échantillon, telle qu'elle aurait été donnée par un dispositif expérimental de comportement analogue au modèle numérique.

Dans les simulations, les blocs conducteurs sont en laiton ($\lambda_B = 110 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$). L'échantillon est représentatif d'un bloc de granite, matériau assimilable du point de vue thermique à un assemblage de deux phases: le quartz, de conductivité $\lambda_Q = 7.7 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, valeur moyenne tenant compte de l'anisotropie du quartz, et les autres minéraux de conductivité $\lambda_A = 1.85 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ [8].

L'échantillon est modélisé par un empilement de cubes de dimensions a^3 , chacun des cubes correspondant à l'une des deux phases en présence. La distribution spatiale des phases est construite aléatoirement mais elle correspond, pour chaque couche, à une composition chimique en quartz donnée. Nous nous limitons aux cas où l'épaisseur est un multiple, n , de la taille des 'grains'. Dans les simulations présentées ici, on a choisi pour la dimension des grains $a = 2.5 \text{ mm}$.

3.1. Procédure d'interprétation directe pour un échantillon d'épaisseur donnée

L'évolution de la conductivité thermique 'mesurée' ou conductivité thermique apparente obtenue par la procédure directe est représentée en fonction de l'épaisseur de l'échantillon, et ce, pour une composition chimique et une dimension de grains fixées (Fig. 2). Les résultats montrent que cette conductivité thermique apparente décroît en fonction de l'épaisseur, depuis une valeur maximale ($4.02 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour un granite à 40% de quartz) obtenue pour une seule couche de grains, jusqu'à une limite asymptotique estimée à $3.15 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Cette variation vient de la non uniformité des températures sur les faces de l'échantillon, liée à l'hétérogénéité de l'échantillon.

Remarque. La distribution aléatoire des phases peut conduire, pour plusieurs échantillons de même teneur en

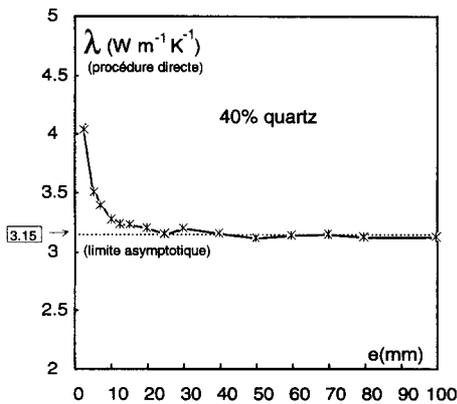


Fig. 2. Conductivité thermique apparente calculée pour des échantillons de granite à 40% de quartz et de différentes épaisseurs.

quartz et d'épaisseur fixée, à une dispersion des valeurs de conductivité thermique apparente. Les résultats présentés sur la Fig. 2 correspondent à la moyenne de la conductivité thermique pour chaque épaisseur, calculée à partir de plusieurs simulations.

3.2. Procédure d'interprétation de Beck

Les résultats présentés concernent des échantillons dont l'épaisseur est comprise entre l'épaisseur du grain (2.5 mm), et cinq fois cette valeur (12.5 mm), ce qui correspond à l'utilisation classique pour la méthode de la barre divisée dans le cas d'échantillons grenus.

Les résultats de simulation interprétés suivant la procédure de Beck pour trois compositions chimiques en quartz, 30, 35 et 40%, montrent tout d'abord que l'ordonnée à l'origine diffère de la longueur des blocs conducteurs, alors que les résistances de contact sont nulles: au lieu de 55 mm, longueur des blocs dans la simulation, on trouve une valeur proche de 35 mm pour les différentes compositions. Par ailleurs, les conductivités thermiques déduites des diagrammes ($\Delta\theta/\text{grad } \theta = f(e)$) sont respectivement 2.66, 2.88 et $3.09 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Ces valeurs sont comparées sur la Fig. 3 aux conductivités thermiques apparentes des mêmes échantillons obtenues par la procédure directe et à la limite asymptotique $\lambda = 3.15 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, définie pour une composition de 40% (Fig. 2) et assimilée à la conductivité thermique homogénéisée. Pour des échantillons grenus du type granite, le conductivimètre utilisé suivant la procédure de Beck ne permet pas de retrouver la conductivité thermique apparente d'un échantillon d'épaisseur définie, mais approche assez bien la conductivité homogénéisée du matériau bien que la mesure soit faite sur de petits échantillons.

4. MESURES EXPÉRIMENTALES

Une mesure de conductivité thermique a été réalisée en suivant la procédure de Beck sur un granite de composition chimique en quartz d'environ 40% et de dimension moyenne de grains de l'ordre de 2.5 mm [9]. Des pastilles d'épaisseurs comprises entre 2 et 10 mm ont été testées et placées entre deux blocs conducteurs en laiton comparables à ceux simulés numériquement. La conductivité thermique du granite ainsi mesurée est égale à $3.13 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Par ailleurs, une mesure sur un échantillon du même granite, d'épaisseur 10 mm, a été faite avec un appareil de type conductivimètre absolu [9]: la valeur obtenue est égale à $3.42 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Nous allons analyser l'ensemble de ces résultats expérimentaux compte-tenu de l'hétérogénéité du matériau,

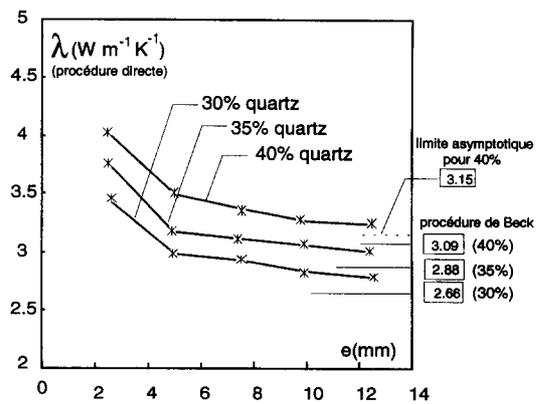


Fig. 3. Comparaison des valeurs de conductivités thermiques calculées suivant la procédure directe et suivant la procédure de Beck pour différentes compositions chimiques.

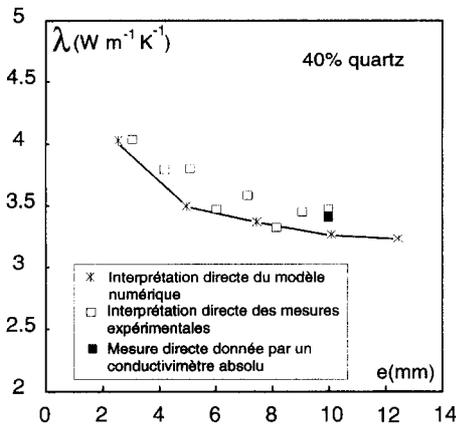


Fig. 4. Synthèse des résultats expérimentaux et numériques pour un granite à 40% de quartz.

et en utilisant certaines des conclusions fournies par la simulation numérique.

Dans le cas de l'appareil à barre divisée utilisé pour la mesure, l'ordonnée à l'origine de la droite expérimentale du diagramme $(\Delta\theta/\text{grad } \theta) = f(e)$ devrait représenter la distance réelle entre les points 2 et 3 sur l'appareil, à laquelle s'ajoute la longueur équivalente aux résistances de contact. La modélisation numérique a montré que le caractère hétérogène du granite conduit à une sous-estimation de 20 mm de l'ordonnée à l'origine. Si nous admettons que cette sous-estimation est applicable aux résultats expérimentaux, l'ordonnée à l'origine doit être prise égale à 47 mm alors qu'elle est de 27 mm sur la droite expérimentale. Connaissant alors la longueur équivalente de l'ensemble 'blocs conducteurs—résistances thermiques de contact', il est possible de déduire la conductivité thermique apparente de chacun de ces échantillons pour les différentes épaisseurs.

Les résultats expérimentaux et les résultats de la simulation numérique obtenus pour le granite à 40% de quartz sont reportés sur la Fig. 4. On constate d'une part une analogie entre ces deux courbes avec des valeurs expérimentales plus élevées, d'environ $0.2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, d'autre part une dispersion des points expérimentaux qui est probablement liée au fait que la composition chimique en quartz peut varier d'une plaquette à une autre. Enfin, la mesure directe faite sur un échantillon de 10 mm d'épaisseur avec le conductivimètre absolu ($3.42 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) est très proche de la mesure réinterprétée pour la pastille de 10 mm tirée de la droite de Beck ($3.48 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

En conclusion, on constate que la variation des conductivités des échantillons en fonction de l'épaisseur, mise en évidence par calculs, est tout à fait compatible avec les mesures effectuées. Ceci démontre la validité du modèle proposé et de son traitement numérique. Cependant, il est intéressant de comprendre pourquoi une variation non linéaire de la conductivité thermique apparente des échantillons conduit à une droite sur le diagramme $(\Delta\theta/\text{grad } \theta) = f(e)$.

5. LINÉARITÉ DE LA FONCTION $(\Delta\theta/\text{grad } \theta) = f(e)$

Dans le cas d'un matériau grenu, on constate une quasi-linéarité de la fonction $(\Delta\theta/\text{grad } \theta) = f(e)$ bien que la conductivité apparente de chaque pastille ne soit pas constante. Les raisons de cette linéarité sont liées à l'allure de la courbe donnant la conductivité apparente en fonction de l'épaisseur (Fig. 3). Pour une pastille d'épaisseur e et lorsque les résistances de contact sont nulles, la longueur $(\Delta\theta/\text{grad } \theta)$ s'écrit [équation (2)]

$$(\Delta\theta/\text{grad } \theta) = e[\lambda_B/\lambda(e)] + e_B, \quad (3)$$

avec $\lambda(e)$ conductivité thermique apparente de la pastille d'épaisseur e . La longueur équivalente $(\Delta\theta/\text{grad } \theta)$ doit être une fonction linéaire de l'épaisseur e et peut donc s'écrire sous la forme

$$(\Delta\theta/\text{grad } \theta) = e[\lambda_B/\lambda(e)] + e_B = Ae + B, \quad (4)$$

avec A et B constantes. Cela implique que $\lambda(e)$ est une fonction de la forme

$$\lambda(e) = \frac{e\lambda_B}{Ae + B - e_B}. \quad (5)$$

Pour les échantillons à 40% de quartz, on constate effectivement que la simulation numérique donne pour la fonction $\lambda(e)$ une distribution de points qui correspond à peu près à l'équation (5) si l'on se limite aux dimensions de pastilles utilisées dans la procédure de Beck (2.5 mm à 12.5 mm). La conductivité thermique déduite de la valeur de la pente A est égale à $3.09 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. C'est une valeur légèrement inférieure à la limite asymptotique, $3.15 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, mais assez différente des conductivités thermiques apparentes des échantillons, $3.23 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour la pastille d'épaisseur 12.5 mm jusqu'à $4.02 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour celle de 2.5 mm.

6. CONCLUSIONS

Ce travail montre l'effet de l'hétérogénéité d'un échantillon sur la mesure de sa conductivité thermique par la méthode de la barre divisée.

En utilisant la procédure directe pour un échantillon hétérogène grenu, on constate que la mesure donne une conductivité thermique apparente qui dépend de l'épaisseur de l'échantillon. Pour obtenir la conductivité thermique homogénéisée du matériau, il est nécessaire de faire la mesure sur un échantillon d'épaisseur supérieure à 6 fois la dimension du grain élémentaire (pour des blocs conducteurs en laiton et du granite à 40% de quartz): une épaisseur d'échantillon inférieure conduit à une sur-estimation de la conductivité thermique, l'erreur pouvant atteindre près de 30% lorsque l'épaisseur de l'échantillon est égale à la dimension des grains.

Dans la procédure de Beck, la linéarité des points représentatifs de $\Delta\theta/\text{grad } \theta = f(e)$ est souvent interprétée comme la preuve d'une épaisseur des pastilles suffisante pour permettre l'homogénéisation de la conductivité thermique. Il a été clairement montré qu'il n'en est rien et que cette linéarité est liée à la forme de la fonction $\lambda(e)$. Les conductivités thermiques apparentes des plaquettes sont différentes de la conductivité thermique homogénéisée du matériau. Malgré tout, la valeur fournie par la procédure de Beck n'est que légèrement sous-estimée par rapport à la conductivité thermique homogénéisée du matériau et l'écart ne dépasse pas 2%.

Ainsi, l'utilisation d'un conductivimètre suivant la procédure de Beck permet d'approcher la conductivité thermique homogénéisée du matériau, au moins dans le cas de matériaux moyennement conducteurs et dont les composants présentent un faible contraste de conductivités (rapport de l'ordre de 4). L'extension de ce résultat à d'autres types de matériaux, par exemple des matériaux composites à fort contraste de conductivités entre les phases en présence, est évidemment très hasardeuse, et une étude sur ce sujet serait sans doute souhaitable.

Remerciements—Les auteurs remercient le Conseil Régional d'Aquitaine pour sa participation financière.

RÉFÉRENCES

- H. S. Carslaw et J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids* (2nd Edn), p. 510. Clarendon Press, Oxford (1959).
- Y. S. Touloukian, R. W. Powell, C. Y. Ho et P. G. Klemens, Thermal conductivity. In *Thermophysical Pro-*

erties of Matter, Vol. 2, pp. 1a–39a. IFI/Plenum, New York-Washington (1970).

3. A. Degiovanni et C. Moyne, Résistance thermique de contact en régime permanent—influence de la géométrie du contact, *Rev. Gén. Therm.* **334**, 557–564 (1989).
4. M. Danis et J. Gounot, Influence de la longueur de l'échantillon sur la mesure simulée de conductivité thermique d'un matériau hétérogène, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* **18**, 591–598 (1991).
5. A. E. Beck, A steady state method for the rapid measurement of the thermal conductivity of rocks, *J. Sci. Instrum.* **34**, 186–189 (1957).
6. E. Koutsikos, Nouvelles méthodes de détermination de la conductivité thermique des roches granitoïdes à partir de données minéralogiques et géochimiques, Thèse, Université P. et M. Curie, Paris (1985).
7. M. Danis, C. Gobbe et J. J. Royer, Analyse critique des procédures d'utilisation d'un conductivimètre à barre divisée pour des échantillons grenus: application au cas des granites, Rapport interne L.E.P.T. no. 95.2 (1995).
8. K. Hori et G. Simmons, Thermal conductivity of rock forming minerals, *Earth Planet. Sci. Lett.* **6**, 359–368 (1969).
9. J. J. Royer et M. Danis, Mise en évidence de phénomènes de réfraction thermique entre le granite de Beauvoir et son encaissant: données analytiques, *Documents BRGM* **124**, 305–310 (1988).



Pergamon

Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 39, No. 10, pp. 2187–2190, 1996
 Copyright © 1996 Elsevier Science Ltd
 Printed in Great Britain. All rights reserved
 0017-9310/96 \$15.00 + 0.00

0017-9310(95)00283-9

Thermal ignition in buoyancy-driven boundary layer flows along inclined hot plates

W. J. SHEU and M. C. LIN

Department of Power Mechanical Engineering, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan, Republic of China

(Received 22 December 1994 and in final form 6 April 1995)

1. INTRODUCTION

The criterion of ignition of combustible boundary-layer flow over a heated surface is a fundamental problem of combustion theory, tackled by experiment, series expansion, numerical simulation or asymptotic analysis in the limit of large activation energy. Because the behavior of most fires on earth is governed by buoyancy-induced convection, ignition in boundary-layer flow under natural convection is related not only to ignition phenomena influenced by natural convection on the academic side, but also to the onset of accidental fire on the practical side.

Laminar combustible boundary-layer flow along a vertical plate at a high-temperature wall serves as a prototypical problem to assess the effect of natural convection on ignition. Ignition phenomena of this buoyant boundary-layer flow were investigated numerically and experimentally [1, 2]. Ono *et al.* [1] proposed a numerical correlation $\ln[\sqrt{x_1} Pr^{n-1}] = E/RT_w + \text{constant}$ to evaluate ignition distances for selected system parameters. The results predicted from this numerical correlation agreed satisfactorily with their experimental data. However, the constant in the numerical correlation was undetermined. Obviously this constant is a function of other system parameters, e.g. reactant concentrations, *Pr* number, etc. No complete ignition criterion for such a typical problem, to the authors' knowledge, is published, even though the method of large activation energy asymptotics is well established to obtain a theoretical ignition criterion. An asymptotic analysis is superior to numerical methods because asymptotic solutions correlate all system parameters into a single equation, and thereby facilitate physical interpretations.

The ignition phenomena of combustible boundary-layer flow under purely natural convection at various angles of inclination θ are of our interest (Fig. 1). The objective of the present work is to obtain an explicit criterion of ignition, which is a function of θ , the *Pr* number, the temperature at the wall and other properties of the combustible gas, by means of an asymptotic analysis in the limit of large activation energy.

2. FORMULATION

The approximations of a steady, two-dimensional and laminar boundary-layer flow are applicable. The other assumptions are as follows: the specific heats at constant pressure of the various species are equal to a constant; radiative heat transfer, Soret and Dufour effects are neglected; the flow is the ideal gas mixture with constant values of $\rho\mu$, $\rho\lambda$ and $\rho^2 D_i$. For thermal ignition, we assume a global one-step irreversible chemical reaction ($F + \nu_O O \rightarrow \text{products}$) with $\omega = BT^x (\rho Y_F / W_F)^{n_F} (\rho Y_O / W_O)^{n_O} \exp(-E/RT)$ [1–3].

With the above assumptions, the conservation equations are

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g(\rho_\infty - \rho) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{2}$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q W_F \omega \tag{3}$$